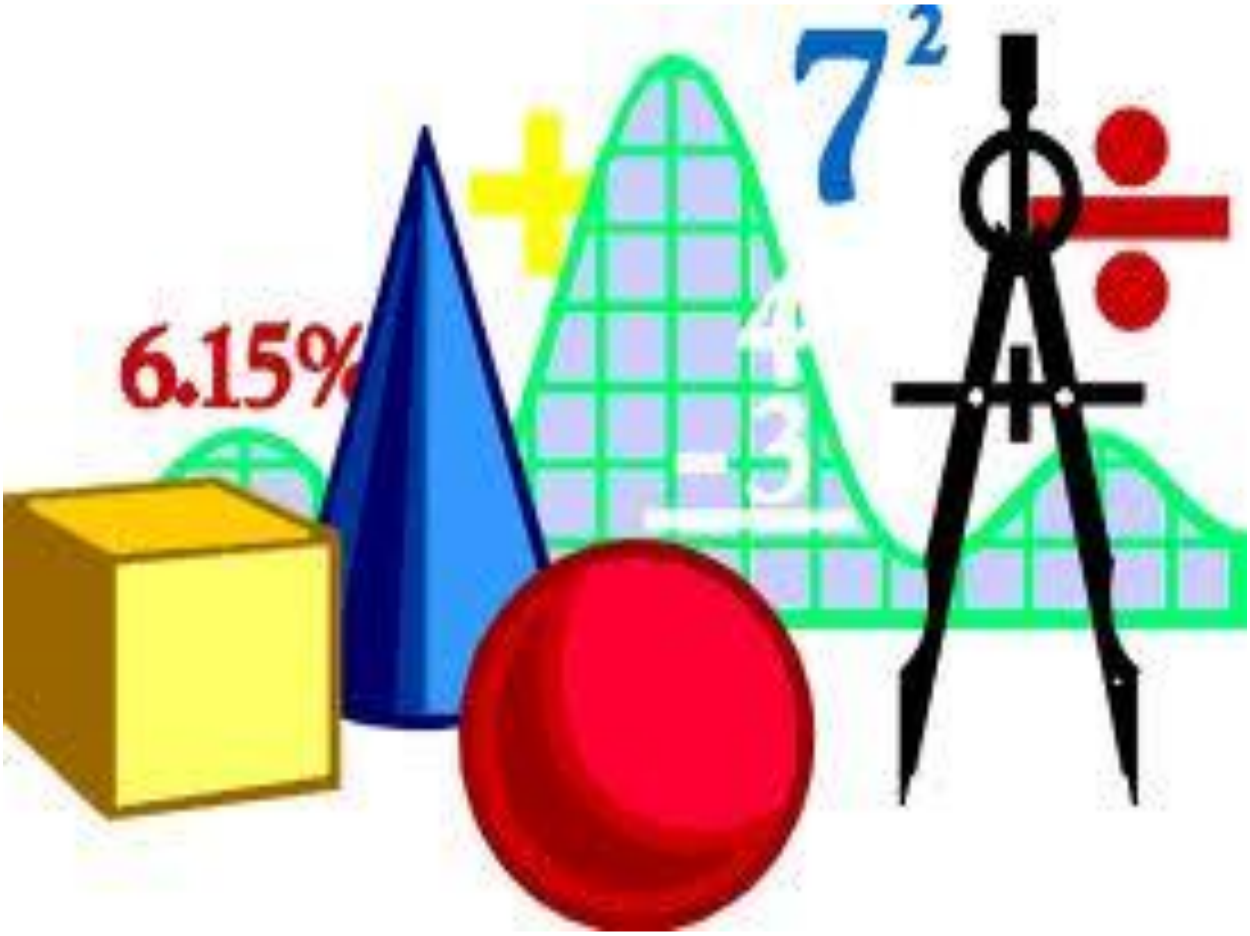
1ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΝΑΤΟΛΗΣ
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



ΣΧΟΛ.ΕΤΟΣ:2012-13

Περιεχόμενα

<u>Εισαγωγή</u>

Στα πλαίσια της διαθεματικής εργασίας αποφασίσαμε μετά από συζητήσεις με τους μαθητές της Γ', τάξης να ασχοληθούν με θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών.

Η α΄ ομάδα ανέλαβε ως εργασία: Το τρίγωνο του Πασκάλ.

Η β΄ ομάδα ανέλαβε να βρει πληροφορίες για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης από τους Βαβυλώνιους.

Και η γ΄ ομάδα ανέλαβε την έννοια της απόδειξης.

Οι μαθητές αποδέχτηκαν με ενθουσιασμό την εκπόνηση των εργασιών και πιστεύω ότι τους κέντρισαν το ενδιαφέρον και θα συμβάλλει στην συγκρότηση μιας θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Οι συμμετέχοντες:

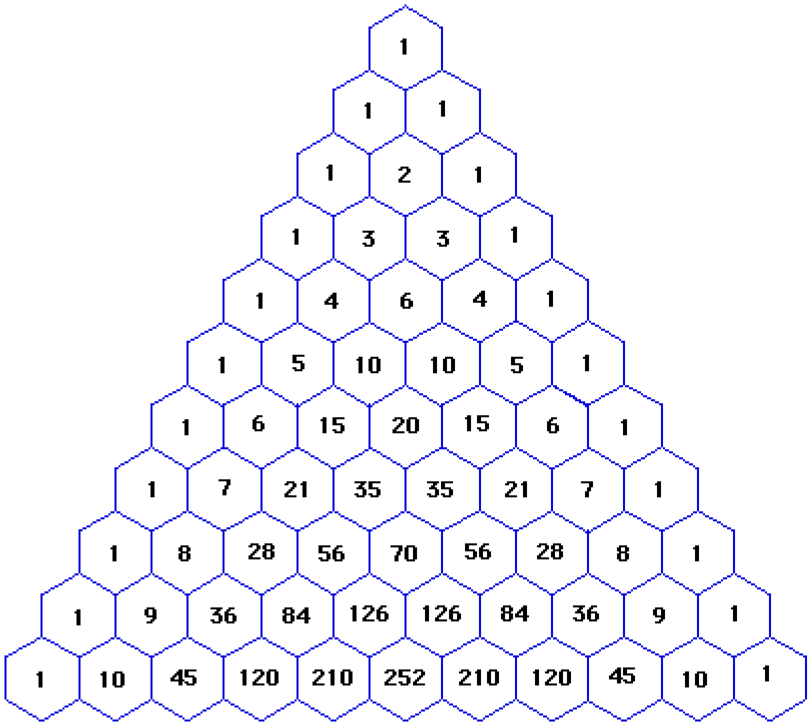
Οι μαθητές του τμήματος Γ2

Οι μαθητές του τμήματος Γ3

Η Καθηγήτρια:

Παπουτσή Λαμπρινή (ΠΕ03)

$1^{η}$ Εργασία: Το Τρίγωνο του Πασκάλ



Το τρίγωνο αυτό είναι γνωστό σαν τρίγωνο του Πασκάλ και πήρε την ονομασία του από τον Βλάσιο Πασκάλ (Blaise Pascal 1623-1662), Γάλλο μαθηματικό και φιλόσοφο, που πρώτος έγραψε μια πραγματεία σχετικά μ’ αυτό το 1653, με τίτλο «Πραγματεία πάνω στο Αριθμητικό Τρίγωνο (Traite du Triangle Arithmetique)».

Στα μαθηματικά, το τρίγωνο του Πασκάλ είναι μία τριγωνική γεωμετρική διάταξη των δυωνυμικών συντελεστών. Ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του μαθηματικού Μπλεζ Πασκάλ στο μεγαλύτερο μέρος του δυτικού κόσμου, παρόλο που άλλοι μαθηματικοί το είχαν μελετήσει αιώνες πριν στην Ινδία, την Περσία, την Κίνα και την Ιταλία.

Οι σειρές στο τρίγωνο του Πασκάλ αριθμούνται ξεκινώντας από την γραμμή 0, και οι αριθμοί κάθε σειράς είναι σχετικοί με τις διπλανές τους. Μια απλή κατασκευή του τριγώνου γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο. Στην σειρά 0 γράφεται μόνο ο αριθμός 1. Μετά, για την κατασκευή των στοιχείων των ακόλουθων σειρών προστίθεται ο αριθμός που βρίσκεται αμέσως από πάνω και αριστερά με τον αριθμό αμέσως από πάνω και δεξιά. Αν οποιοσδήποτε από τους αριθμούς δεξιά ή αριστερά δεν υπάρχει, υποκαθίσταται με μηδέν. Για παράδειγμα, ο πρώτος αριθμός της πρώτης γραμμής είναι 0 + 1 = 1, ενώ οι αριθμοί 1 και 3 της τρίτης σειρά προτίθενται ώστε να δώσουν τον αριθμό 4 της τέταρτης σειράς.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Ιδιότητες του τριγώνου Pascal

$1^{η}$ Ιδιότητα : Η πρώτη γραμμή έχει έναν αριθμό, η δεύτερη γραμμή έχει δυο αριθμούς, η τρίτη γραμμή έχει τρεις αριθμούς, κ.ο.κ. Η ν-οστήγραμμή έχει ν αριθμούς.

$2^{η}$ Ιδιότητα : Οι αριθμοί της ν-οστής γραμμής είναι συντελεστές του αναπτύγματος $(α+β)^{ν-1}$. Παράδειγμα: Το ανάπτυγμα του $(α+β)^4$ έχει συντελεστές 1. 4, 6, 4, 1 τους αριθμούς της πέμπτης γραμμής.

$$(\alpha+\beta)^4 = 1\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4$$

$(α+β)^0 =1$

$(α+β)^1 =1α +1β$

$(α+β)^2 = 1α^2 + 2αβ +1β^2$

$(α+β)^3= 1α^3 +3α^2β+ 3αβ^2 +1β^3$

$(α+β)^4= 1α^4+4α^3β+6α^2β^2+ 4αβ^3+1β^4$

3η Ιδιότητα : Το άθροισμα των αριθμών κάθε γραμμής είναι ίσο με μια δύναμη του 2. Για την ακρίβεια το άθροισμα των αριθμών της ν-οστής γραμμής είναι ίσο με $2^{\nu-1}$

$$1 = 2^0$$

$$1+1 = 2^1$$

$$1+2+1 = 2^2$$

$$1+3+3+1 = 2^3$$

$$1+4+6+4+1 = 2^4$$

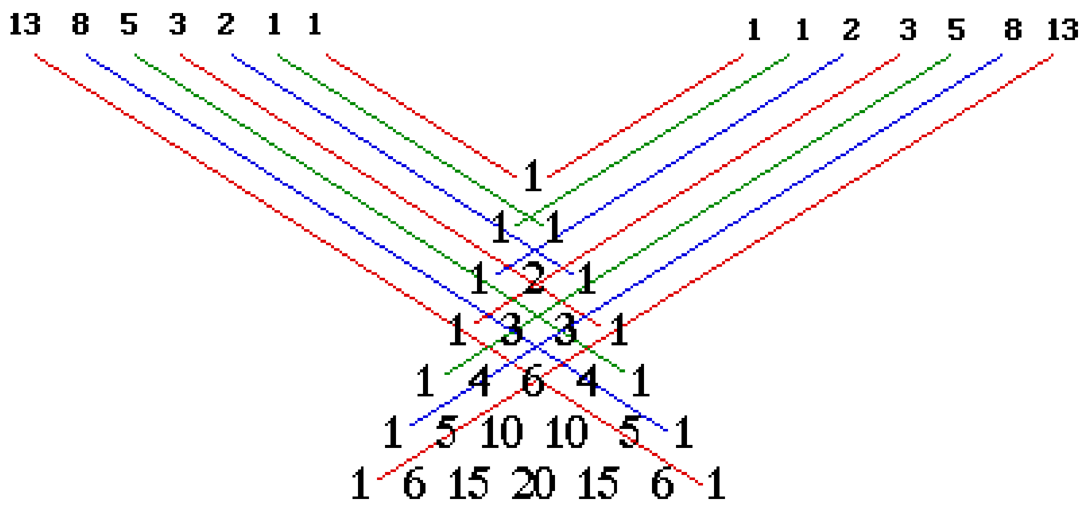
$$1+5+10+10+5+1 = 2^5$$

κ.ο.κ

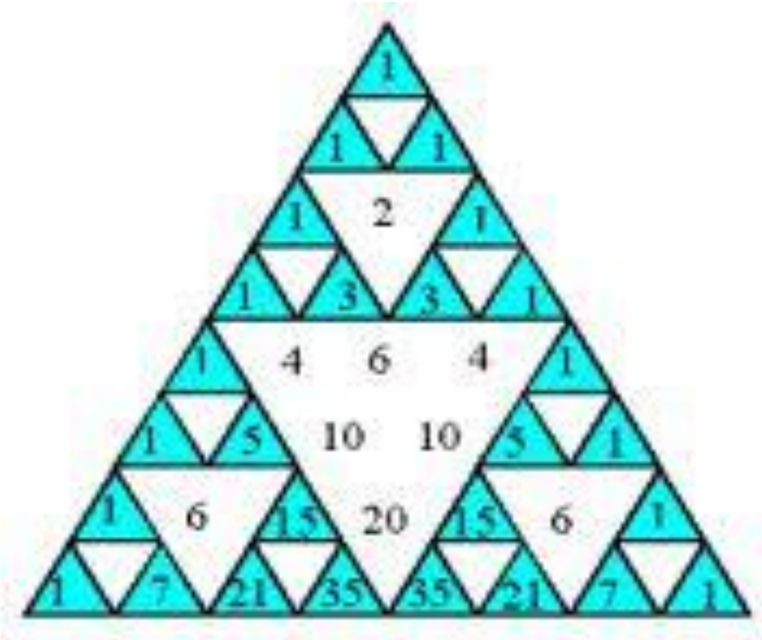
4η Ιδιότητα: Οι αριθμοί Fibonacci.

Στη σειρά Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …) κάθε όρος προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων, 2=1+1, 3=2+1, 5=3+2, 8=5+3, 13=8+5, κτλ.

Για να βρεθούν οι αριθμοί Fibonacci πάνω στο τρίγωνο του Πασκάλ παίρνουμε το άθροισμα των αριθμών πάνω στις πλάγιες διαγώνιες όπως φαίνεται στο σχήμα.



5^{η} Ιδιότητα : Αν στο τρίγωνο του Πασκάλ χρωματίσουμε τις μονάδες και τους περιττούς αριθμούς, τότε εμφανίζεται ένα σχέδιο με μικρότερα και μεγαλύτερα τρίγωνα.



6^{η} Ιδιότητα: Οι αριθμοί που σχηματίζουν οι πέντε πρώτες σειρές είναι δυνάμεις του 11, π.χ. $1=11^0$, $11=11^1$, $121=11^2$, $1331=11^3$, $14641=11^4$.

7^{η} Ιδιότητα: α) Η 1^{η} διαγώνια σειρά περιέχει μόνο τον αριθμό 1
β) Η 2^{η} διαγώνια σειρά περιέχει τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, 4...
γ)Η 3^{η} διαγώνια σειρά περιέχει τους τριγωνικούς αριθμούς 1,3,6,10,15,21..... δηλαδή τους αριθμούς που παριστάνονται στο επίπεδο με τη μορφή τριγώνου.

<u>$2^{η}$ Εργασία: Οι Βαβυλώνιοι και η επίλυση της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού</u>

ΒΑΒΥΛΩΝΙΑΚΗ ΠΛΑΚΑ

Οι Βαβυλώνιοι ήταν ένας λαός της αρχαιότητας που έζησε από το 2.000-538 π.Χ. Πληροφορίες λένε ότι έφτασαν σε υψηλό επίπεδο μαθηματικής κουλτούρας, τη μεγαλύτερη των σύγχρονων Αιγυπτίων. Οι Βαβυλώνιοι τον 16ο αιώνα π.Χ ανακάλυψαν το Πυθαγόρειο θεώρημα(1.000 χρόνια πριν από τη γέννηση του Πυθαγόρα!!!). Γνώριζαν τις τέσσερις πράξεις και τις ρίζες, λύνανε προβλήματα με εξισώσεις πρώτου και δεύτερου βαθμού, υπολόγιζαν το εμβαδόν ορθογώνιων τριγώνων, παραλληλόγραμμων, τραπεζίων καθώς και το εμβαδόν του κύκλου με τη διαφορά ότι ο αριθμός π ήταν ίσος με 3 αντί αυτού που χρησιμοποιούμε σήμερα (π =3,14).

Το αριθμητικό τους σύστημα είχε ως βάση το 60, ήταν μη ψηφιακό δηλ. το κάθε αριθμητικό σύμβολο αναγραφόταν επαναλαμβάνοντας, όσες φορές χρειάζονταν το σύμβολο για το 1, δηλ. το 3 γράφεται ΙΙΙ. Ήταν επίσης θεσιακό, χωρίς υποδιαστολή και χωρίς μηδέν.

Το σύστημα που χρησιμοποιούσαν για τη μέτρηση του χρόνου ήταν το εξηνταδικό, σύστημα που χρησιμοποιούμε και σήμερα. Έτσι πχ όταν οι Βαβυλώνιοι ήθελαν να εκφράσουν τον αριθμό 75 , έλεγαν «1,15», όπως και εμείς σήμερα τα 75 λεπτά τα εκφράζουμε σαν 1 ώρα και 15 λεπτά.

Δευτεροβάθμιες εξισώσεις

Κυριαρχούν πολλές απόψεις για τη διαδικασία και τους τρόπους με τους οποίους οι Βαβυλώνιοι έλυναν δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Μια άποψη είναι ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν το γενικό τύπο λύσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων γενικής μορφής κι αυτόν εφάρμοζαν σε κάθε περίπτωση. Μία δεύτερη άποψη είναι ότι έλυναν τις εξισώσεις με τη βοήθεια κατάλληλων πινάκων. Μια τρίτη υπόθεση είναι ότι έλυναν τις εξισώσεις με τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους. Τέλος, μερικοί ισχυρίζονται ότι ο Βαβυλώνιος γραφέας γνώριζε τη λύση από την αρχή, πριν κατασκευάσει, το πρόβλημα και η διαδικασία λύσης ήταν προκαθορισμένη. Γενικά, σε κανένα βαβυλωνιακό κείμενο δεν υπάρχει ούτε ένας γενικός κανόνας, ένα θεώρημα, που να αναφέρεται όχι μόνο στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις αλλά σε οποιαδήποτε μαθηματική ενότητα.

Η πρώτη γνωστή μέθοδος επίλυσης μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, σύμφωνα με τον Neugebauer είναι καταγεγραμμένη σε μια βαβυλωνιακή πήλινη πινακίδα που χρονολογείται περίπου ανάμεσα στο 1.800 και το 1.600 π.Χ. Οι Βαβυκώνιοι δεν χρησιμοποιούσαν έναν αλγεβρικό τύπο για την εύρεση λύσεων της εξίσωσης, αλλά με μια σειρά βημάτων που τους οδηγούσε στη λύση της. Στις πινακίδες που έχουν διασωθεί μέχρι σήμερα δεν καταγράφεται ο τρόπος με τον οποίο έφταναν σε αυτά τα βήματα. Έτσι δεν γνωρίζουμε αν η τεχνική αυτή είχε ανακαλυφθεί από κάποιο ‘’σοφό’’ της εποχής και οι υπόλοιποι την ακολούθησαν χωρίς να κατανοούν τι κάνουν ή αν τα κείμενα που έχουμε στη διάθεσή μας είναι απλά ασκήσεις για εξάσκηση μαθητών που γνώριζαν από προφορικές διδασκαλίες τις αιτίες για τις οποίες λειτουργεί η τεχνική που χρησιμοποιούσαν. Ένα παράδειγμα που δίνεται στο βιβλίο του Van der Waerden δείχνει τον τρόπο με τον οποίο οι Βαβυλώνιοι αντιμετώπιζαν τέτοιου είδους προβλήματα.

Πρόβλημα 1.Αφαιρώ από το εμβαδόν την πλευρά του τετραγώνου και βρίσκω 14.30. Ποια είναι η πλευρά;
Λύση: Πάρε 1, τον συντελεστή (του x). Διαίρεσε το 1 σε δύο μέρη, θα βρεις 0,30. Πολλαπλασίασε το 0,30 με το 0,30 και θα πάρεις 0,15, πρόσθεσέ το στο 14.30 και η ρίζα του 14.30,15 είναι 29,30. Πρόσθεσε στο 29,30 το 0,30 που πολλαπλασίασες με τον εαυτό του και 30 είναι η πλευρά του τετραγώνου.

Ας δώσουμε τώρα μια εξήγηση στο παραπάνω πρόβλημα με σύγχρονο συμβολισμό. Το πρόβλημα ζητάει ουσιαστικά να βρούμε τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης x^2-x =14.30. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν το εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης κι έτσι ο αριθμός 14.30 είναι στην ουσία ο αριθμός 14 * 60 + 30=870. Σύμφωνα με τα βήματα που ακολουθεί η παραπάνω λύση πρέπει αρχικά να διαιρέσουμε το 1, το οποίο είναι ίσο με $(0,60)_{60,}$ δια δύο , οπότε παίρνουμε το $(0,30)_{60}$ το οποίο είναι ίσο με 30 * 60^{-1} = $(0,5)_{10.}$ Στη συνέχεια υψώνουμε στο τετράγωνο το $(0,30)_{60}$ και βρίσκουμε $(0,15)_{60}$ (ή αλλιώς $(0,25)_{10}$). Έπειτα υπολογίζουμε το άθροισμα $(14.30)_{60}$ + $(0,15)_{60}$ = $(14.30,15)_{60}$ (στο δεκαδικό σύστημα έχουμε $(870)_{10}$ + $(0,25)_{10}$ = $(870,25)_{10}$). Μετά βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα του $(14.30,15)_{60}$ η οποία είναι η $(29,5)_{60}$ (ή στο δεκαδικό σύστημα $\sqrt{(870,25)}_{10}$ =$(29,5)_{10}$). Τέλος, για να βρούμε το x προσθέτουμε $(29,5)_{60}$ + $(0,30)_{60}$ = $(30)_{60}$, δηλαδή x =$(29,5)_{10}$ + $(0,5)_{10}$ = $(30)_{10}$.
Αν θέλαμε να γράψουμε τα παραπάνω βήματα συμπυκνωμένα σε έναν αλγεβρικό τύπο θα είχαμε τον:

$$\boldsymbol{x}=\sqrt{(\frac{-\beta}{2})^2-\gamma}+\frac{-\beta}{2}$$

Οι Βαβυλώνιοι δεν αναγνώριζαν τους αρνητικούς αριθμούς κι έτσι η ρίζα της εξίσωσης, η $x = -29$, δεν μπορεί να υπολογιστεί. Για τον ίδιο λόγο δεν είχαν μια ενιαία μορφή για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις όπως έχουμε τώρα, αλλά αντιμετώπιζαν διαφορετικά κάθε έναν τύπο εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού από τους τρεις που μπορούσαν να χειριστούν:

$x^2 + αx = β$, $x^2 – αx = β$, και $x^2 + β = αx$

όπου α και β είναι θετικοί αριθμοί. Η τέταρτη μορφή $x^2 + αx + β = 0$ έχει αρνητικές λύσεις και δεν περιλαμβάνεται στις περιπτώσεις που μελετούσαν.

<u>$3^{η}$ Εργασία: Η έννοια της «απόδειξης».</u>

Απόδειξη είναι οτιδήποτε μας πείθει ότι μια πρόταση είναι αληθινή .Η απόδειξη παρουσιάζεται με τρόπο που δεν χωρά αμφισβήτηση .Επίσης πρέπει να είναι πειστική σε όλους. Για τον λόγο αυτό συνδέεται πάντα με ένα συλλογισμό. Με μια σειρά προτάσεων δηλαδή, η καθεμία από τις οποίες προκύπτει με λογικό τρόπο από την προηγούμενη. Δεν αρκεί να πούμε ότι ένα θεώρημα της αριθμητικής ισχύει ή ότι ένας νόμος της φυσικής είναι αληθινός. Πρέπει να δείξουμε το κάθε βήμα που μας οδήγησε σε αυτόν τον ισχυρισμό. Ένας από τους ρόλους της επιστήμης και της φιλοσοφίας είναι να μας παρέχουν αποδείξεις για τον κόσμο που μας περιβάλει. Σε κάθε επιστήμη όμως υπάρχουν προτάσεις που δεν μπορούν να αποδειχτούν. Οι προτάσεις αυτές ονομάζονται αξιώματα ή αιτήματα.

Η πρώτη απόδειξη στην ιστορία των Μαθηματικών αποδίδεται στο Θαλή τον Μιλήσιο(624-547 πΧ), ο οποίος απέδειξε ότι η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη. Από τότε η απόδειξη έβαλε στέρεα θεμέλια στην ανάπτυξη των Μαθηματικών και έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξή τους.

Επιστήμες όπως η φυσική βασίζονται σε πειράματα και μετρήσεις για να αποδειχτεί ένα φαινόμενο. Στα μαθηματικά αυτό δεν γίνεται. Καθετί πρέπει να αποδεικνύεται με συγκεκριμένο και λογικό τρόπο . Μόνο τότε διασφαλίζεται η αλήθεια των μαθηματικών θεωρημάτων, στα οποία μετά βασίζονται καινούργια θεωρήματα , και με αυτό τον τρόπο εξελίσσεται η επιστήμη των μαθηματικών. Δύο από τις βασικότερες τεχνικές που χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε κάτι στα μαθηματικά είναι οι ακόλουθες :

Ευθεία απόδειξη:
Χρησιμοποιούμε τα αξιώματα , δηλαδή έννοιες που είναι προφανείς και δεν χρειάζεται απόδειξη , και θεωρήματα που γνωρίζουμε ότι ισχύουν (έχουν αποδειχτεί προηγουμένως).

Απόδειξη με αντίφαση:
Είναι γνωστή και ως <<εις άτοπον απαγωγή>> . Θεωρούμε ότι η αρχική μας υπόθεση δεν ισχύει και καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα που είναι άτοπο. Άρα, τελικά η αρχική μας υπόθεση δεν μπορεί παρά να είναι σωστή .

Άλλες μέθοδοι απόδειξης:

Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες ήταν οι πρώτοι που εφάρμοσαν αυστηρούς μαθηματικούς κανόνες για να οδηγηθούν σε συμπεράσματα και αποδείξεις . Ασχολήθηκαν κυρίως με τις γεωμετρικές κατασκευές και χρησιμοποιώντας κανόνα και διαβήτη ανακάλυπταν ιδιότητες και πολύπλοκα σχήματα . Μία άλλη πολύ χρήσιμη μέθοδος απόδειξης είναι η μαθηματική επαγωγή . Χρησιμοποιείται κυρίως για να αποδειχτεί ότι μία μαθηματική σχέση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς . Η απλουστευμένη λογική αυτής της μεθόδου είναι η εξής : πρώτα υποθέτουμε ότι $\nu=1$. Το δεύτερο βήμα είναι να υποθέσουμε ότι ισχύει και για $\nu=\kappa$, όπου κ φυσικός . Τελικά αποδεικνύουμε ότι η ιδιότητα ισχύει κάνοντας πράξεις για $\nu=\kappa+1$. Πολλές άλλες τεχνικές απόδειξης χρησιμοποιούνται σε ανωτέρου επιπέδου μαθηματικά .